

complex integration

$$\int_a^b F(z) dz = \int_c F(z) dz$$

↑
مسار یکسان غیر مغلق .

$$\oint_c F(z) dz =$$

↑
مسار یکسان مغلق .

$$\text{II} \int_c F(z) dz = ??$$

$$\int_c (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_c (u dx - v dy) + i \int_c (v dx + u dy)$$

$$F(z) = u+iv$$

$$z = x+iy$$

$$dz = dx+idy$$

ex evaluate $\int_c F(z) dz$ From $0+i$ to $2+5i$

$$\text{where } F(z) = (3x+y) + i(x-2y)$$

(a) along $y = x^2+1$

(b) along line From $(0,1)$ to $(0,5)$
and From $(0,5)$ to $(2,5)$

(b)

solution

(a)

$$y = x^2 + 1$$

$$\rightarrow dy = 2x dx$$

$$\int_0^2 ((3x+y) + i(x-2y))(dx+idy)$$

$$\int_0^2 (3x+x^2+1) + i(x-2x^2-2)(dx+i2x dx)$$

$$\int_0^2 (3x+x^2+1) + i(x-2x^2-2) \underbrace{(1+i2x)}_{(1+i2x)} dx$$

$$= \int_0^2 ((7x-x^2+4x^3+1) + i(3x+4x^2+2x-2)) dx$$

$$= \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + x \right) + i \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x \right) \Big|_0^2$$

$$= (7+2 - \frac{8}{3} - 16 + 2) + i(3+2 + \frac{4 \times 8}{3} + 4 - 4)$$

$$= \frac{88}{3} + i \frac{62}{3}$$

وبالمثل في

(b)

Ex evaluate $\int_C z \bar{z} dz$ For $(-1, 0)$ to $(-1, 1)$

Sol
 $z = x + iy$ $dz = dx + i dy$

$$\begin{aligned} & \int (2x + i2y)(dx + i dy) \\ &= \int_0^1 (-2 + i2y)(0 + i dy) \\ &= \int_0^1 (-2i - 2y) dy \\ &= (-2iy - y^2) \Big|_0^1 = \underline{-2i - 1} \end{aligned}$$

limits
 $x = -1$
 $dx = 0$

Ex 43 evaluate $\int_C \bar{z} dz$ For $x = 2 \cos t$
 $y = \sin t$
 From $t=0$ to $t = \frac{\pi}{2}$

Sol

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = 2 \cos t - i \sin t$$

$$dz = dx + i dy$$

$$dz = -2 \sin t + i \cos t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t - i \sin t)(-2 \sin t + i \cos t) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4 \cos t \sin t + 2i \sin^2 t + 2i \cos^2 t + \sin t \cos t$$

d)

$$\int_0^{\pi/2} -3 \cos t + \sin t + 2i$$

$$\int_0^{\pi/2} -\frac{3}{2} \sin 2t + 2i = \left(\frac{3}{4} \cos 2t + 2ti \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-3}{4} + \pi i - \frac{3}{4} = \underline{\underline{\pi i - \frac{3}{2}}} \quad *$$

Complex integration

ا) $\oint_C F(z) dz = 0$ إذا كانت الدالة $F(z)$ ليس لها مقام ولا تحتوي على \bar{z} أو $|z|$ أو أصفار للمقام لا تقع داخل المنحنى C (analytic)

ب) $\oint_C \frac{F(z)}{z-a} dz = 2\pi i F(a)$

ج) $\oint_C \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n F(z)}{dz^n}$

* إذا كانت الدالة تحتوي على مقام وصفه داخل المنحنى C .

المفكار :- أ) تكويين مباشر.

ب) فيه أكثر من قوس في المقام وواحد منهم يقع داخل المنحنى والباقي لا.

ج) فيه أكثر من قوس تحت يقع داخل المنحنى

نصبت النظرية: $\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$

evaluate

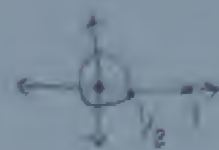
$$(a) \oint_C e^{10z} dz = 0$$

$$(b) \oint_{|z|=1} \frac{z^3}{z-3} dz = 0$$



$$(c) \oint_C \operatorname{sech}(z) dz = 0$$

$$(d) \oint_{|z|=1/2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint \frac{2z-1}{z(z-1)} dz$$



$$= \oint \frac{\frac{2z-1}{(z-1)}}{z} dz = 2\pi i \left(\frac{-1}{-1} \right) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

$$(e) \oint_{|z|=6} \frac{7z-6}{z^2-2z} dz = \oint_{|z|=6} \frac{7z-6}{z(z-2)} dz$$

$$= \oint \frac{\frac{7z-6}{(z-2)}}{z} dz + \oint \frac{\frac{7z-6}{z}}{(z-2)} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-6}{-2} \right) + 2\pi i \left(\frac{7 \cdot 2 - 6}{2} \right)$$

$$= 14\pi i$$

F

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{zz^2}}{(z-i)^3} dz$$

$$\frac{d^2}{dz^2} e^{zz^2} = 4z \cdot e^{zz^2} + 4(4z^2 \cdot e^{zz^2} + 4e^{zz^2})$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} (-4 \cdot 4 \cdot e^{-2}) + 4e^{-2}$$

$$= 2\pi i [-12e^{-2}]$$

Cauchy's Integral formula

If $f(z)$ is analytic inside & on a simple closed curve C , then $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$. z_0 is a point inside C .

Sol

دالت analytic ما عدا عند z_0 .
 الرسم مسارا C_1 عبارة عن دائرة مركزها النقطة z_0 .
 ونفرض ρ حيا ρ قيمة صغيرة $\rightarrow 0$

هذا ان تصبح $\frac{f(z)}{z-z_0}$ analytic في المنطقة المحيطة بـ C_1 و C

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$C_1: |z-z_0| = \rho \Rightarrow z-z_0 = \rho e^{i\theta}$
 $\therefore z = z_0 + \rho e^{i\theta} \rightarrow dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$
 معادلت الدائرة
 مركزها z_0
 ونفرض ρ

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\cancel{\rho e^{i\theta}}} \rho i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) i d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\pi i f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \approx 2\pi i f(z_0) \text{ as } \rho \rightarrow 0$$

$$f(z) = u + i v \quad z = x + i y \rightarrow dz = dx + i dy$$

$$\therefore \oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

Green غير قابل لتطبيق هنا النظرية الثانية

حذر تفريجه

ثاني

$$\therefore \oint_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy$$

analytic $f(z)$

وحيدانية

$$\therefore u_x = v_y \quad \& \quad u_y = -v_x$$

$$\therefore \oint_C f(z) dz = 0$$